

СРАВНЕНИЕ ПОТЕРЬ, ВНОСИМЫХ В СОЛЕНОИД ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ И КРУГЛЫМ НЕМАГНИТНЫМИ СЕРДЕЧНИКАМИ

В. К. ЖУКОВ

(Представлена научным семинаром факультета автоматики и вычислительной техники)

Одним из методов, пригодных для бесконтактного измерения геометрических размеров изделий цилиндрической формы (таких, как проволока, трубы), является метод вихревых токов. Теория этого метода достаточно хорошо разработана для случая круглого сечения контролируемого изделия. Однако на практике всегда имеет место некоторая некруглость сечения. Поэтому естественно поставить вопрос о том, как влияет некруглость изделия на параметры датчика, а следовательно, и на результат измерения. Решить эту задачу в общем виде не представляется возможным. Однако можно рассмотреть несколько частных случаев, для которых решение существует, а затем полученные выводы распространить на случай произвольного сечения. С этой целью возьмем эллиптический и круглый немагнитные цилиндры с равными площадями сечения и сравним вносимые ими потери в индуктивный датчик с проходной катушкой. Для упрощения выводов будем считать датчик бесконечно длинным соленоидом и рассмотрим энергетические соотношения, имеющие в нем место, на единицу его длины.

Обозначим через \dot{W}_1 мощность, выделяющуюся в эллиптическом цилиндре, а через \dot{W}_2 — в круглом цилиндре, на единицу их длины. Мощность в зазоре между обмоткой датчика и цилиндром равна: в случае круглого сечения

$$\dot{W}_{з.к.} = \dot{W}_0 - \dot{W}_{20},$$

а в случае эллиптического

$$\dot{W}_{з.э.} = \dot{W}_0 - \dot{W}_{10},$$

где \dot{W}_0 — мощность, выделяющаяся в полости датчика в отсутствии цилиндра, \dot{W}_{20} — мощность в воздушном круглом цилиндре, с площадью, равной площади металлического цилиндра, \dot{W}_{10} — мощность в воздушном эллиптическом цилиндре. Мощность потерь соленоида с круглым сердечником будет:

$$\dot{W}_к = \dot{W}_2 + \dot{W}_{з.к.} = \dot{W}_0 - \dot{W}_{20} + \dot{W}_2, \quad (1)$$

а с эллиптическим:

$$\dot{W}_э = \dot{W}_1 + \dot{W}_{з.э.} = \dot{W}_0 - \dot{W}_{10} + \dot{W}_1. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) видно, что вставление цилиндров вызывает

изменение мощности потерь в соленоиде на величину $\Delta \dot{W}_K = \dot{W}_2 - \dot{W}_{20}$ в одном случае и на $\Delta \dot{W}_9 = \dot{W}_1 - \dot{W}_{10}$ в другом случае. Относительная разность потерь мощности

$$\frac{\Delta \dot{W}_K - \Delta \dot{W}_9}{\Delta \dot{W}_K} = 1 - \frac{\dot{W}_1 - \dot{W}_{10}}{\dot{W}_2 - \dot{W}_{20}},$$

как нетрудно показать, будет равна относительной разности приведенных сопротивлений

$$\frac{\Delta \dot{Z}_K - \Delta \dot{Z}_9}{\Delta \dot{Z}_K} = \frac{\Delta \Delta \dot{Z}}{\Delta \dot{Z}_K},$$

где $\Delta \dot{Z}_K$ и $\Delta \dot{Z}_9$ — сопротивления, приведенные в соленоид соответственно круглым и эллиптическим цилиндрами. Таким образом, чтобы сравнить потери, вносимые цилиндрами в соленоид, необходимо проанализировать выражение

$$\frac{\Delta \Delta \dot{Z}}{\Delta \dot{Z}_K} = 1 - \frac{\dot{W}_1 - \dot{W}_{10}}{\dot{W}_2 - \dot{W}_{20}},$$

для чего нужно найти зависимости для \dot{W}_1 , \dot{W}_2 , \dot{W}_{10} , \dot{W}_{20} . Без существенной ошибки можно полагать, что $\dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}$, поэтому

$$\frac{\Delta \Delta \dot{Z}}{\Delta \dot{Z}_K} = 1 - \frac{\dot{W}_1 - \dot{W}_{20}}{\dot{W}_2 - \dot{W}_{20}} \quad (3)$$

и определению будут подлежать три величины: \dot{W}_1 , \dot{W}_2 , \dot{W}_{20} .

При определении мощности потерь в эллиптическом цилиндре будем пользоваться эллиптической системой координат ξ , φ , z . Коор-

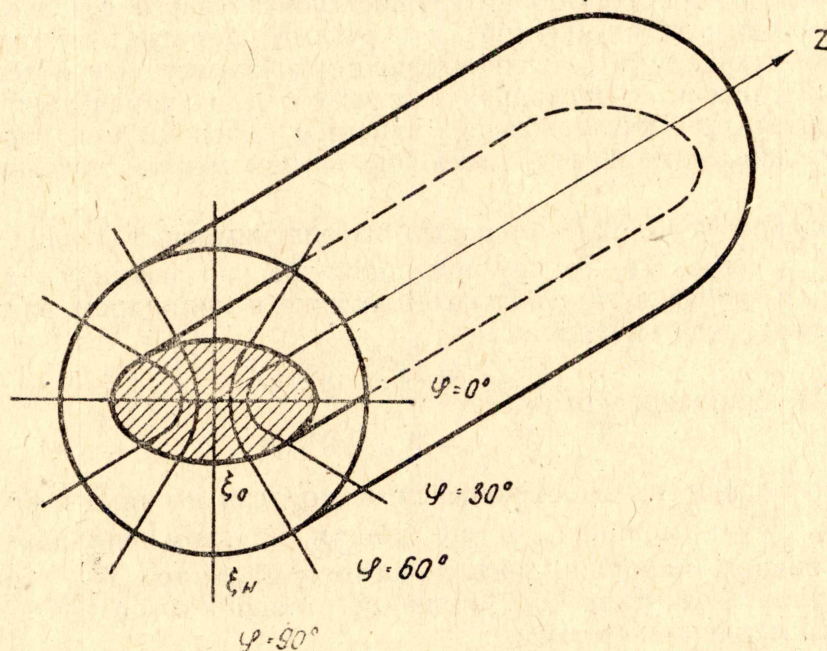


Рис. 1

динатными линиями в этой системе (рис. 1) являются: $\xi = \text{const}$ — софокусные эллипсы, $\varphi = \text{const}$ — софокусные гиперболы. Систему координат расположим так, что поверхность изделия будет являться

координатной линией ξ_0 . Если эллипс сечения изделия имеет малый эксцентриситет e и площадь его значительно меньше площади круга, ограниченного обмоткой соленоида, то можно считать, что обмотка совпадает с координатной линией ξ_n .

Волновое уравнение для вектора напряженности магнитного поля в металле

$$\nabla^2 \bar{H} + \kappa^2 \bar{H} = 0 \quad (4)$$

в эллиптической системе координат преобразуется к двум уравнениям с переменными коэффициентами, решением которых являются специальные функции — функции Матье. Общее решение волнового уравнения (4) будет иметь вид;

$$\bar{H} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{2n} \cdot Ce_{2n}(\xi, q) \cdot ce_{2n}(\varphi, q),$$

где $Ce_{2n}(\xi, q)$ и $ce_{2n}(\varphi, q)$ — функции Матье, $q = -j \frac{1}{4} \omega \cdot \mu_0 \cdot \gamma \cdot h^2$ — аргумент функций, h — расстояние между фокусами эллипса сечения.

Постоянная интегрирования C_{2n} определится из граничного условия: $\bar{H} = \bar{H}_0$ при $\xi = \xi_0$. Напряженность магнитного поля внутри катушки считаем постоянной и равной \bar{H}_0 . После определения постоянной интегрирования будем иметь:

$$\bar{H} = 2\pi \bar{H}_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0^{(2n)} \cdot Ce_{2n}(\xi, q) \cdot ce_{2n}(\varphi, q)}{Ce_{2n}(\xi_0, q) L_{2n}}. \quad (5)$$

Здесь

$$L_{2n} = \int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\varphi, q) \cdot d\varphi,$$

а $A_0^{(2n)}$ — коэффициенты, входящие в $Ce_{2n}(\xi, q)$ и $ce_{2n}(\varphi, q)$.

Для определения потерь энергии в эллиптическом цилиндре необходимо знать напряженность электрического поля \bar{E} . Вектор \bar{E} найдем из выражения $\text{rot } \bar{H} = \gamma \bar{E}$, после подстановки в которое значения \bar{H} из (5) найдем:

$$\begin{aligned} \bar{E} = & \bar{\xi} \frac{2\pi \bar{H}_0}{\gamma \cdot h_\varphi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0^{(2n)} \cdot Ce_{2n}(\xi, q) \cdot ce'_{2n}(\varphi, q)}{Ce_{2n}(\xi_0, q) L_{2n}} \\ & - \bar{\varphi} \frac{2\pi \bar{H}_0}{\gamma \cdot h_\xi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_0^{(2n)} \cdot Ce_{2n}(\xi, q) \cdot ce_{2n}(\varphi, q)}{Ce_{2n}(\xi_0, q) \cdot L_{2n}}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\bar{\xi}$ и $\bar{\varphi}$ — единичные орты, h_φ и h_ξ — метрические коэффициенты Лямме. Поток энергии через боковую поверхность цилиндра будет определяться вектором Умова — Пойнтинга.

$$\bar{P} = \frac{1}{2} [\bar{E} \cdot \bar{H}^*],$$

где \bar{H}^* — является сопряженной комплексной величиной по отношению к \bar{H} . При определении вектора \bar{P} подставляются значения \bar{H} и \bar{E} на поверхности цилиндра, т. е. при $\xi = \xi_0$. Мощность \bar{W}_1 , выделя-

ющаяся в эллиптическом цилиндре, определится интегрированием \bar{P} по всей поверхности единичного цилиндра:

$$\dot{W}_1 = \int_S \bar{P} \cdot d\bar{S}.$$

После выполнения всех операций и преобразования найдем:

$$\dot{W}_1 = \frac{2\pi \cdot H_0^2}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ce'_{2n}(\xi_0, q)}{Ce_{2n}(\xi_0, q) L_{2n}}. \quad (7)$$

Для определения мощности, поглощаемой круглым цилиндром, найдем вектор напряженности электрического поля \bar{E} и вектор напряженности магнитного поля \bar{H} в цилиндре. Затем определим вектор потока энергии \bar{P} через поверхность цилиндра и интегрированием по всей поверхности найдем \dot{W}_2 .

Вектор \bar{H} находится в результате решения волнового уравнения (1), записанного в цилиндрической системе координат. Решение будет иметь вид:

$$\bar{H} = \bar{H}_0 \frac{I_0(V\bar{j} m_k)}{I_0(V\bar{j} m_{k,0})}, \quad (8)$$

где $m_{k,0} = r_0 \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_0$, r_0 — радиус круглого цилиндра, $m_k = r \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \mu_0$.

Вектор напряженности электрического поля \bar{E} найдем из 1-го уравнения Максвелла

$$\text{rot } \bar{H} = \gamma \cdot \bar{E}.$$

После подстановки в него значения \bar{H} из (8) и преобразований получим:

$$\bar{E} = \frac{1}{\gamma} \frac{(1+j) \dot{H}_0}{V \sqrt{2\omega \cdot \gamma \cdot \mu_0}} \frac{I_1(V\bar{j} \cdot m_k)}{I_0(V\bar{j} m_{k,0})}. \quad (9)$$

$I_1(V\bar{j} \cdot m_k)$ и $I_0(V\bar{j} m_k)$ в выражениях (8) и (9) обозначают функции Бесселя от комплексного аргумента.

Зная \bar{H} и \bar{E} , нетрудно найти мощность \dot{W}_2 , поглощаемую круглым цилиндром

$$\dot{W}_2 = \frac{\pi \cdot H_0^2}{\gamma} \cdot m_k \cdot \frac{I_1(V\bar{j} \cdot m_{k,0})}{I_0(V\bar{j} \cdot m_{k,0})}. \quad (10)$$

Остается найти потери мощности \dot{W}_{20} в воздушном круглом цилиндре. Методика остается той же самой, что и в случае металлического цилиндра. Прделав все преобразования, найдем:

$$\dot{W}_{20} = j \frac{\pi \cdot H_0^2}{\gamma} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \cdot r_0 \cdot \gamma \cdot \frac{I_1(m_B)}{I_0(m_B)}, \quad (11)$$

где $m_B = r_0 \cdot \omega \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$.

Выразим q и m_B через m_k , для чего найдем ω из выражения для m_k и подставим в два других. После подстановки найдем

$$q = -j \frac{1}{4} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot m_k^2 \quad (12)$$

и

$$m_B = \frac{1}{r_0 \cdot \gamma} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot m_k^2. \quad (13)$$

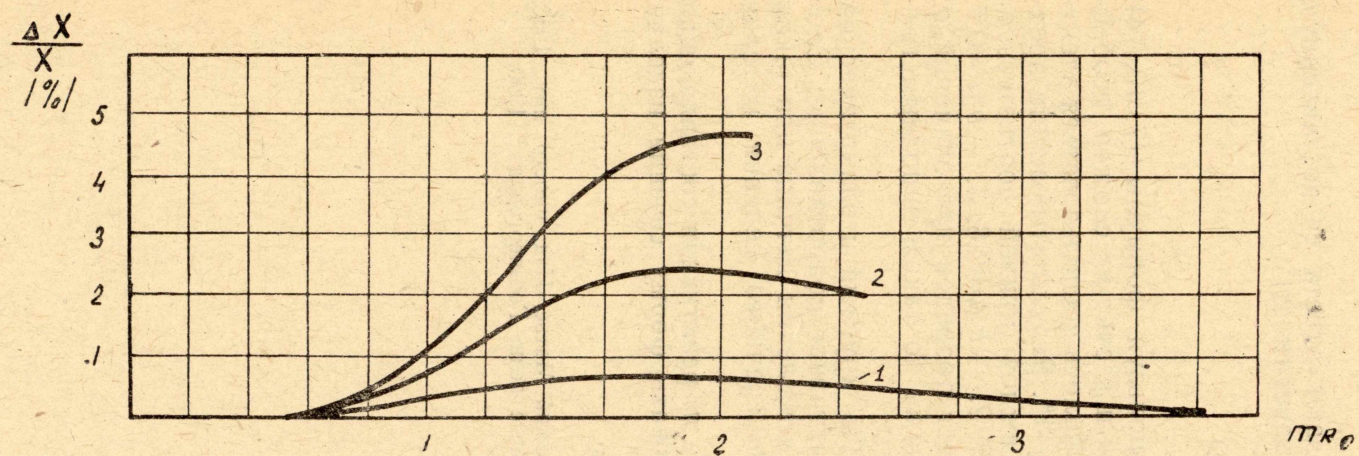


Рис. 2

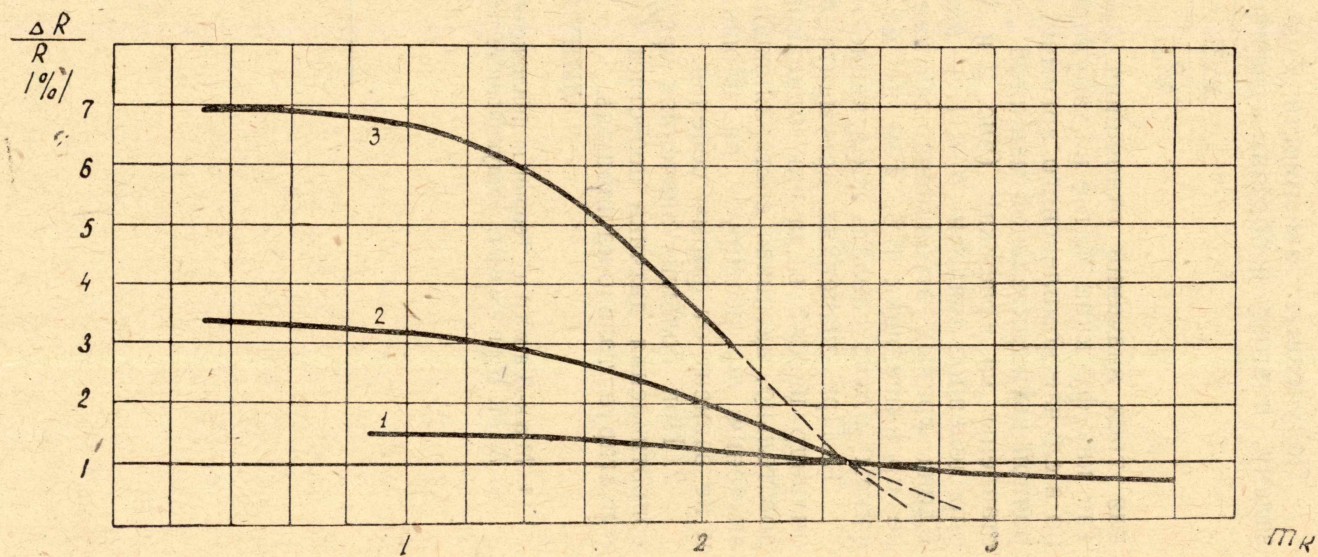


Рис. 3

Здесь через b и a обозначены малая и большая полуоси эллипса сечения.

Так как $m_b \ll 1$, то $J_1(m_b) = \frac{m_b}{2}$, а $I_0(m_b) = 1$, поэтому

$$\dot{W}_{20} = j \frac{\pi \cdot \dot{H}_0^2}{2\gamma} m_k^2. \quad (14)$$

Полученные зависимости еще не дают ответа на поставленную задачу, поэтому изобразим графически зависимость

$$\frac{\Delta \dot{Z}}{\dot{Z}_k} = f(m_k)$$

для трех значений отношения b/a , используя формулы (7, 10, 14). Так как функции Матье не табулированы и расчет их сложен, особенно в случае комплексного аргумента, пришлось воспользоваться электронной вычислительной машиной „Минск-1“. Результаты расчета представлены на графиках (рис. 2 и 3). Каждой кривой соответствует определенное значение b/a : 1. — $b/a=0,9$; 2. — $b/a=0,8$; 3. — $b/a=0,7$. Длина кривых ограничена, так как расчет проведен для значений q , не превышающих 0,6. Тем не менее даже по таким неполным графикам можно сделать следующие выводы:

1. При значениях аргумента $m_k = 2,5$ круглый и эллиптический цилиндр вносят в датчик одинаковое активное сопротивление. Следовательно, активная составляющая сопротивления датчика при таком значении m_k реагирует на площадь поперечного сечения изделия и не зависит от формы сечения.

2. При больших значениях аргумента m реактивная составляющая сопротивления датчика перестает чувствовать форму сечения изделия и реагирует только на площадь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Лаклан. Теория и приложение функций Матье. Изд. иностр. лит., 1953.
2. А. М. Ваинберг. Индукционные плавильные печи, Госэнергоиздат, 1960.